Diszkrét tomográfia a háromszögrácson természet-motiválta algoritmusokkal (Soft computing methods for discrete tomography on the triangular grid)

Tibor Lukić[1], Elisa Moisi[2] és Nagy Benedek[3]

[1] Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, Újvidék, Szerbia
tibor@uns.ac.rs
[2] Faculty of Electrical Engineering and Information Technology, University of Oradea, Nagyvárad, Románia
emoisi@uoradea.ro
[3] Számítógéptudományi Tanszék, Informatikai Kar, Debreceni Egyetem
nbenedek@inf.unideb.hu

Absztrakt. Ebben a cikkben a bináris tomográfia háromszögrácson értelmezett problémáját tekintjük. A rács struktúráját figyelembe véve, három, illetve egyes esetekben hat projekciós irányt vizsgálunk. Az eredeti képek rekonstruálására genetikus algoritmust, illetve egy energia minimalizációs modellt vezetünk be, ami a szimulált hűtés algoritmusán alapul. Az általunk kifejlesztett rekonstrukciós eljárások működését hatszögalakú, megközelítőleg 4000 háromszögpixelből álló, mesterséges tesztképeken mutatjuk be.

1. Bevezetés

A *Tomográpfia* feladata a képek rekonstruálása az adott projekciós adatok alapján. Matematikailag fogalmazva, a feladat a vizsgált függvény meghatározása a függvényen és az értelmezési tartományának a részhalmazain vett integrálok és összegek értékei alapján. A tomográfiai rekonstrukciós probléma lehet diszkrét vagy folytonos. A *diszkrét tomográfiában* (DT) [9, 10] a függvény értékkészlete véges és diszkrét, az alkalmazásokban, a DT általában digitális képek rekonstrukciójával foglalkozik melyek csak néhány szürke árnyalatot hasznának. A DT alkalmazásának területe széleskörű, többek között jelentős alkalmazási terület az orvosi képfeldolgozás kapcsán az orvostudomány [6]: Itt példaként megemlítjük a következő alkalmazásokat: Computer Tomography (CT), Positron Emission Tomography (PET) és az Electron Tomography (ET). A DT részterülete, melyet *bináris tomográfiának* (BT) nevezünk, a bináris képek rekonstruálásával foglalkozik.

A digitális geometriában és a digitális képfeldolgozásban a digitális sík, illetve tér pontjaihoz egész számértékű koordináták kapcsolódnak. A széles körben alkalmazott Descartes-féle koordinátarendszer általában négyzet (téglalap) és

kocka alapú rácsot használ kettő vagy három dimenzióban. Fontos elméleti eredmények mutatnak rá azonban, hogy más típusú, úgynevezett nemhagyományos rácsok használata sokszor jobb eredményekkel kecsegtet. Ezért egyre több algoritmus készül el nemhagyományos rácsokra is. A síkban a hatszög- és a háromszögrácsok a lehetséges alternatívái a négyzetrácsnak, és ígérnek jó eredményeket. A hatszögrács rendelkezik néhány jelentős előnnyel, nagyon egyszerű; csak egy széleskörben használt szomszédsági kritériummal rendelkezik. A hatszögrács leírható három koordinátával melyek tükrözik szimmetriáját: a képpontok elérhetőek zéró összegű koordináta-hármasokkal.

A háromszögrács szimmetriája hasonló ($2\pi/3$ szögben történő elforgatás a rácsot saját magába fordítja vissza), ebből kifolyólag három koordinátatengely elégnek bizonyul leírásához (lásd pl. [23, 25]).

A BT területének a négyzetrácson széleskörű irodalma van [5, 4] három [30, 31], négy [3] vagy akár ennél is több projekciót felhasználva (lásd pl. [28]). A kétirányú projekció (vagyis a soronként és oszloponként történő vetítések) adják a legalapvetőbb problémát, ennek kiterjesztése négyirányú projekciókra (az átlós irányokat is bevonva) szintén gyakran vizsgált probléma. A hatszögrácson a háromirányú projekcióval definiálható az alapfeladat [16]. A háromszögrácson, a háromirányú vetítést használó alapfeladat [19, 18], a rács geometriáján alapulva, hatirányú projekciót használó feladattá egészíthető ki [15]. Ebben a cikkben az előző három említett cikkünk eredményeit foglaljuk össze.

A tomográfia feladata általában nem könnyű. Két projekció esetén általában a feladat aluldeterminált, több projekció esetén pedig NP-nehéz ([8]); ezért különböző sztochasztikus módszerek használata elterjedt, mint pl. genetikus, vagy memetikus algoritmusok, illetve szimulált hűtés [26]. Ezekkel a módszerekkel gyakran elfogadható megoldást nyerhetünk vállalható időráfordítással ([2, 5, 29]).

A cikk felépítése a következő. A 2. Fejezetben röviden megadjuk a háromszögrács geometriájának leírását. Ezután formálisan is megfogalmazzuk a BT problémáját. Majd bemutatjuk a genetikus-alapú, illetve az energia-minimalizációs algoritmusunkat a 3. és a 4. Fejezetekben. Az algoritmusok eredményeit néhány mesterséges képen mutatjuk be (5. Fejezet), illetve röviden értékeljük is őket. A cikket néhány zárómegjegyzéssel fejezzük be.

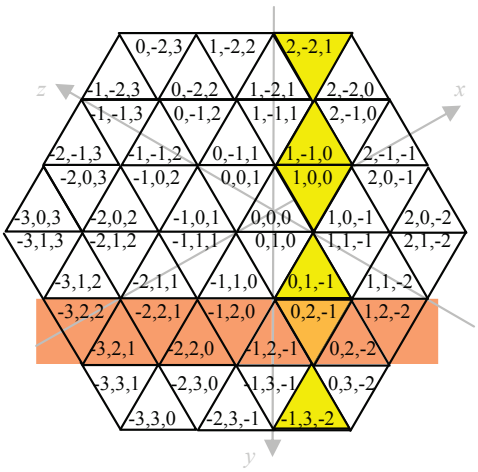
2. A Háromszögrács Leírása

A háromszögrácsot három koordinátával írjuk le [20–22, 24] stb. alapján. Ily módon szimmetrikus lesz a rendszer, minden pontot (háromszögpixelt) egy-egy egész értékeket tartalmazó koordináta-hármassal címzünk meg. A tengelyek egymással $2\pi/3$ szöget zárnak be. Mivel a terünk kétdimenziós a három koordinátaérték nem független egymástól: azok összege minden egyes pixelre 0 vagy 1. *Páros*nak nevezzük azokat a pixeleket, amelyekre 0 a koordinátaértékek összege ($\triangle$ alakú, illetve orientációjú pixelek), és *páratlan*nak azokat, amelyeket 1-összegű hármasok címeznek (ezek orientációja ∇). *Sáv*nak (*lane*) nevezzük azon pixelek összességét, amelyekre egy adott koordináta éréke rögzített. Az 1. ábrán

pirossal színezve vannak azon pixelek, melyekre a második koordináta érteke 2. Ezekben a sávokban a páros és páratlan pixelek felváltva következnek.

A pixelek közt a következő szimmetrikus relációt szomszédságnak nevezzük: a $p(p(1), p(2), p(3))$ és a $q(q(1), q(2), q(3)$ k-szomszédok, ha $|p(i) - q(i)| \leq 1$ $(i = 1, 2, 3)$ és $|p(1) - q(1)| + |p(2) - q(2)| + |p(3) - q(3)| \leq k$ $(k = 1, 2, 3)$.

A bináris képeink minden háromszögpixelhez a $\{0, 1\}$ halmazból rendelnek értéket.



1. ábra: Koordináta rendszer a háromszögrácshoz, egy sáv ($y = 2$) és egy az y tengellyel párhuzamos projekciós irány.

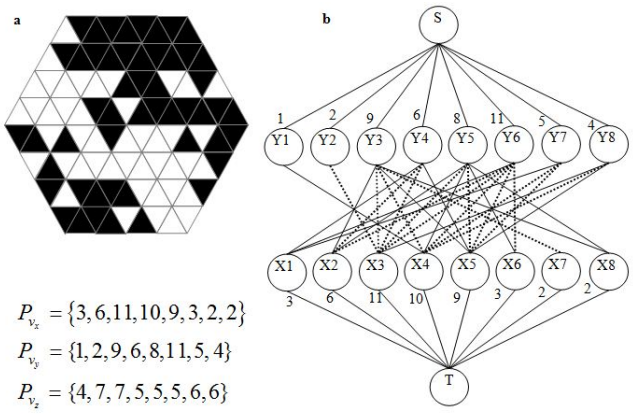
A három alapvető projekciós irány a koordináta tengelyekre merőleges irányok, ezek éppen az előbb definiált sávonkénti vetítések, vagyis az egy sávban levő 1-es értékű pixelek száma. Amikor hat projekciót használunk akkor a további három irány a tengelyekkel párhuzamos, egy ilyen látható sárga színnel az 1. ábrán. Matematikailag leírva: ezek olyan pixelek, amelyekre két koordinátaértékük különbsége rögzített, az ábrán jelzett pixeleknél az első koordináta értéke eggyel több, mint a harmadiké.

Az algoritmusainkat szabályos hatszögalakú képeken teszteltük, melyek oldalhossza 26, és így pixelszáma 4056. Az algoritmus bemeneteként adottak a projekciók értékei. Célunk a kép rekonstruálása ezekből az adatokból, illetve olyan kép előállítása amelyre a projekciós adatok jó egyezést mutatnak a megadottakkal.

3. Rekonstrukció Genetikus Algoritmussal

Az evolúciós algoritmusok széleskörben használhatóak a tomográfia témakörében (lásd pl. [5]). Mi a genetikus algoritmus (GA) egy háromszögrácsra adaptált változatát készítettük el és mutatjuk be.

A genetikus megközelítés egyszerre több megoldásjelölttel (itt lehetséges bináris képekkek) dolgozik [1, 7, 27]. Először egy kezdőpopulációt kell előállítanunk, ezt a hálózatfolyam (*network flow*) algoritmus ([4]) olyan változatával készítjük el, amely minden egyes egyed esetén a háromból két projekciós irányt kiválasztva, azokhoz illeszti az előállított kép vetületeit (lásd 2. ábra).



2. ábra: A hálózatfolyam algoritmusa a kezdeti egyedek előállítására, két projekciós irányban optimalizálva.

Az egyedek jósága (*fitness function*) helyett hibájukat mérjük: az inputként adott vetületi értékek és az egyed megfelelő vetületi értékeinek abszolút eltéréseit összegezzük. Ily módon az ideális megoldás hibaértéke 0.

Az algoritmusban versengő kiválasztást használtunk (*tournament based selection*), mindig két szülőjelöltet választunk ki egy szerepre, és ezek közül a kisebb hibájú lesz az, aki végül szülőként felhasználásra kerül.

A keresztezéskor mindkét szülőtől egy-egy területet örököl a gyerek (új egyed): ehhez az eredeti képeket 6 részre vágjuk (kb. mint egy pizzát), a leghosszabb átlói mentén. Mind a hat részben véletlenszerűen kiválasztunk egy-egy pixelt. Ezekből hármat az egyik, hármat a másik szülő örökít. Ezután ezen pixelek szomszédai öröklődnek a megfelelő szülőtől, stb. (tulajdonképpen régiónövesztési algoritmussal lefedjük a képet, és minden pixel attól a szülőtől öröklődik, amelyik eredetileg kiválasztott pontjából hamarabb elértük. Minden keresztezéskor két új egyedet hozunk létre, a másik új egyed minden egyes pixelt éppen az ellenkező szülőtől örököl, mint az első.

A mutációs operátorunk véletlenszerűen változtat az egyeden, egy pixel helyett annak egy 1-szomszédos pixelét teszi a képbe.

Az algoritmusunk a memetikus algoritmusok közé tartozik, az alap genetikus megközelítés lokális kereséssel is kiegészül: Ahhoz, hogy az eredményünk szebb (képileg is elfogadhatóbb) legyen, minden egyed létrehozásakor egy kompaktsági operátort is lefuttatunk az egyedre, amely az izolált pixelek egy részét megszünteti (abból a feltételezésből kiindulva, hogy a valódi képek általában összefüggő régiókból épülnek fel és nem tartalmaznak izolált pontokat). Ez az operátor nem változtatja meg a projekciós értékeket, mert olyan módosításokon alapul, amik megtartják a vetületet (ilyenekre a gyakorlati eredmények diszkussziójában még visszatérünk).

Az algoritmusban fix létszámú átlapoló generációkat használunk, vagyis a szülők és a gyermekek egyesített halmazának legjobb elemeit tartjuk meg, velük dolgozunk tovább.

Az algoritmus egy-egy futása fix számú iterációt hajtott végre, illetve a populációméret is fix volt. Különböző futtatásokat végeztünk változó beállításokkal. Az eredményekre az 5. Fejezetben térünk vissza.

4. A Szimulált Hűtésen alapuló Energiaminimalizációs Rekonstrukció

Tekintsük most a BT képrekonstrukciós problémát, ahol a képalkotó eljárás a következő lineáris rendszer segítségével adott

$$Ax = b, \quad A \in R^{m \times n}, \;\; x \in \{0,1\}^n, \; b \in R^m.$$

Az A projekciós mátrix minden sora egy projekciós sugárnak felel meg. A b projekciós vektor elemei tartalmazzák a regisztrált m projekciós értéket. Az x bináris értékeket tartalmazó vektor az ismeretlen képet jelképezi melyet rekonstruálni szeretnénk. Az A projekciós mátrix minden sorának eleme $a_{i,\cdot}$ a pixelen áthaladó projekciós sugár hosszát tartalmazza. A sugár mentén mért összérték a sugár pixelenként áthaladó hossza és az adott pixel intenzitásának szorzatának összege. A projekciók különböző szögekből vetítődnek. Figyelembe véve a háromszögrács szimmetriáját és könnyen megkülönböztethető irányait, ezen munka során, három és hat projekciós irányból nyert vetületeket használunk.

A BT problémát formálisan a következő energia minimalizációs problémára alakítjuk

$$\min_{x \in \{0,1\}^n} E(x), \tag{1}$$

ahol az energia/célfüggvény a következőképpen definiált:

$$E(x) = \frac{1}{2}\left(\|Ax - b\|^2 + \lambda \sum_i \sum_{j \in \Upsilon(i)} (x_i - x_j)^2 \right). \tag{2}$$

A (2) jobb oldalán az első tag az ún. *adat megfelelő* tag, mely a megoldás és a vetületi adatok közötti összhangot fejezi ki. A második tag az ún. *simító*

regularizáció, melynek feladata a megoldás összefüggőségének/kompaktságának előmozdítása. A simító regularizáció alkalmazása azon feltételezésen alapszik, hogy az eredeti kép pixel intenzitásokhoz mérten kompakt régiókból tevődik össze. A $\Upsilon(i)$ az x_i 3-szomszédos pixeleinek indexeit jelöli. A $\lambda > 0$ paraméter az adat megfelelő és a simító regularizáció közötti egyensúlyt hivatott meghatározni. Az (1)-ben megfogalmazott minimalizációs feladat megoldására a szimulált hűtés (Simulated Annealing, röviden SA) algoritmust adaptáltuk.

1. Algoritmus: SA Algoritmus.

A felhasználó által megadott paraméterek:
$T_{start} > 0$ {kezdeti hőmérséklet},
$T_{min} > 0$ {minimális hőmérséklet},
$T_{factor} \in (0, 1)$ {multiplikatív faktor a hőmérséklet csökkentésére},
$NoChgLimit \in \mathbb{N}$ {az egymás után sorrendben csökkentett hőmérsékleti szintek száma elfogadott változtatás nélkül}.
Kezdeti értékek:
$x = [0, 0, \ldots, 0]^T$, $T = T_{start}$,
$NoChg = 0$, $E_{current} = E(x)$.
while $(T \geq T_{min}) \ \wedge \ (NoChg \leq NoChgLimit)$
  for $i = 1$ to sizeof(x),
    határozd meg a j véletlen pozíciót az x vektorban;
    $\widetilde{x} = x$; $\widetilde{x}_j = 1 - x_j$;
    $E_{attempt} = E(\widetilde{x})$;
    $\Delta E = E_{attempt} - E_{current}$;
    $z = rand\,(U(0, 1))$;
    if $(\Delta E < 0) \ \vee \ (\mathrm{Exp}(-\Delta E/T) > z)$, **then**
      $x = \widetilde{x}$; {vátoztatás elfogadva}
      $E_{current} = E_{attempt}$;
      $NoChg = 0$;
    end if
  end for
  $T = T * T_{factor}$;
  $NoChg = NoChg + 1$;
end while.

Az SA egy sztochasztikus optimalizációs algoritmus mely a vizsgált anyag, pl. vas, megfelelő feltételek mellett, forró állapotból történő lehűtésének folyamatát szimulálja. A Metropolis és társai [17] által publikált eredmények alapján az SA algoritmust, mint optimalizációs eljárást, Kirkpatrick és társai [11] fejlesztették ki. Az algoritmus az előre megadott magas hőmérsékletről (kontroll-paraméterrel szabályozott) indul. A kezdeti megoldás véletlenszerű kismértékű változásnak van kitéve és az így keletkezett energiaváltozást, ΔE-t, kiszámítjuk. Ha ΔE negatív, akkor az új megoldást elfogadjuk. Ha ΔE pozitív előjelű (rossz kísérlet), az új megoldás elfogadását a Boltzmann-féle valószínűségi faktortól [12], melynek

alakja

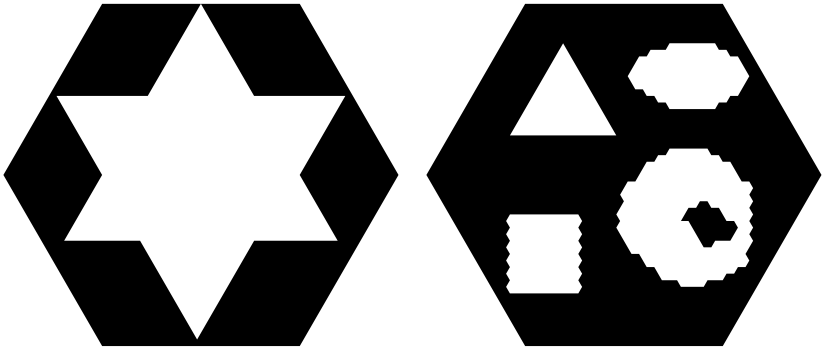
$$e^{-\Delta E/T},$$

tesszük függővé. Ez a folyamat ismétlődik mindaddig amíg az egyensúlyi állapot be nem következik az adott T hőmérsékleti szinten. Az egyensúlyi állapot kritériuma általában elegendő számú iteráció alkalmazása. Ezután a hőmérsékletet csökkentjük és az algoritmust újra futtatjuk. A csökkentett hőmérséklet csökkenti a téves kísérletek elfogadásának valószínűségét. Az egész folyamat addig ismétlődik amíg a fagyott állapot be nem következik, vagyis a megadott megállási kritérium teljesül, mely általában egy végleges, alacsony hőmérséklettel van meghatározva. A végső hőmérséklet általában nulla vagy nullához közeli.

Az általunk adaptált SA algoritmus az (1) minimalizációs probléma megoldására az 1. Algoritmusban van részletesen leírva. Megemlítjük még, hogy az SA algoritmus alkalmazásai hasonló problémáknál [13, 14, 29] kitűnő teljesítményről tanúskodnak. Ezek az eredmények nagy mértékben motiváltak bennünket arra, hogy az SA algoritmust is kiválasszuk a vizsgált minimalizációs probléma megoldására.

5. Futási Eredmények

Kísérleteinkben bináris tesztképeket használunk, melyeknek formája szabályos hatszög és mérete 26x26x26. Ezeknek a képeknek a mérete 4056 pixelháromszög, ami közel áll a 64x64-es négyzetrács alapú kép méretéhez. A kísérletekben használt néhány eredeti tesztképet mutat a 3. ábra.



Csillag Vegyes objektumok

3. ábra: A kísérletekben használt eredeti képek. A képek azonos méretűek: 26 x 26 x 26 (szabályos hatszögek), vagyis 4056 pixelből (háromszögből) tevődnek össze.

1. táblázat: A genetikus algoritmus futtatási teszt adatai

Kép	Generációk száma	Populáció mérete	Rekonstrukció foka (%)	Futási idő (másodperc)
Csillag	10	30	79.45	1453
		50	79.88	2312
		75	80.21	3018
	20	30	79.33	2325
		50	79.88	3179
		75	80.21	4700
	25	30	79.00	2720
		50	79.33	3776
		75	80.10	5387
Vegyes objektumok	10	30	85.25	3106
		50	86.78	5448
	20	30	86.78	5052
		50	87.29	9173

A GA által kapott eredményeket mutatja az 1. táblázat. A szereplő százalékértékek azt mutatják meg, hogy a rekonstruált és az eredeti kép hány vetületi adata egyezik meg (100% a teljes egyezést jelentené).

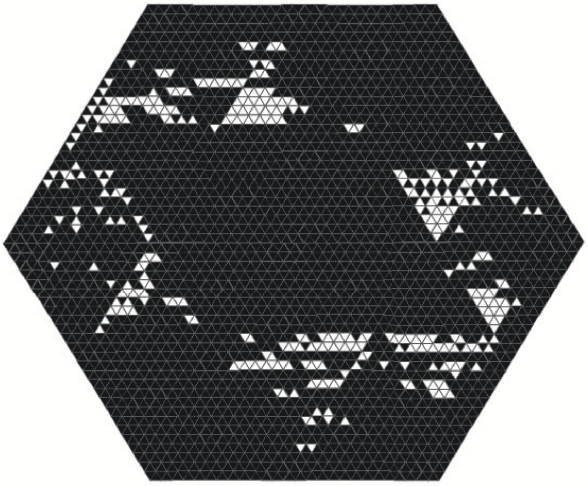
A 4. és az 5. ábra mutatja, hogy a 30 elemű populációmérettel, 20 iteráción át futtatott rekonstrukció eredménye képen hogyan néz ki a Csillag, illetve a Vegyes objektumok tesztképek esetén.

Az algoritmust Intel(R) Core(TM) i5-2430M CPU @ 2.40Ghz processzoros 4.00 Gb belsőmemóriájú gépen futtattuk.

Habár a számadatok viszonylag elfogadható megoldást jeleznek, a rekonstruált képek mégis nagyon különböznek az eredeti képektől.

Az SA algoritmust a következő paraméterértékek mellett futtattuk: $T_{start} = 4$, $T_{min} = 0.001$, $T_{factor} = 0.97$ és $NoChgLimit = 10$. A futtattás közben újraindítást nem alkalmaztunk. A (2) energiafüggvény λ paraméterét empírikus úton határoztuk meg és a kísérletekben vett értéke 5.

Az ezzel a módszerrel rekonstruált képek a 6. és 7. ábrákon láthatóak. Az ábrák alatti százalékértékek azt mutatják, hogy a vetületi adatok hanyad része stimmel a rekonstruált és az eredeti képen. Látható, hogy 6 vetület esetén ez (közel) 100%-os. Az algoritmus futási ideje az SA esetén meghaladta az 1 napot. Megjegyezzük, hogy a csak három vetület alkalmazásánál számos azonos vetületi értékkel rendelkező pixelkonfiguráció létezik [19]. Ebből az következik, hogy nagyobb méretű képeknél a rekonstruált kép majdnem mindig eltér az eredeti képtől, még akkor is, ha a vetületek értékei hibátlanok. Kísérleteink legösszetettebb képeinek, pl. a Vegyes objektumoknak három vetületből nyert rekonstrukciói nagy eltérést mutatnak az eredeti képektől, lásd a 7. ábrát. Mindamellett, a 6 vetületet használó rekonstrukciók lényegesen jobb hasonlóságot mutatnak a megfelelő képek eredetijével.



4. ábra: A Csillag tesztkép rekonstrukciója 3 vetületből GA-val: az eredeti és a rekonstruált képek különbsége (szimmetrikus differencia).

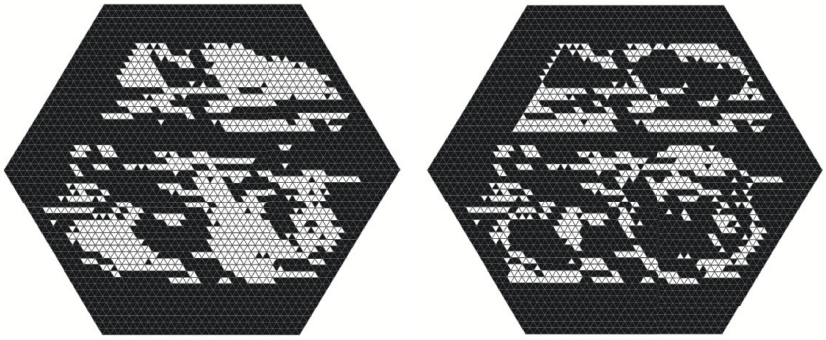
A genetikus megközelítést egyelőre csak a háromirányú vetületekkel alkalmaztuk. Látható, hogy elég gyorsan szolgáltatnak olyan eredményeket, amelyek a projekciós számadatok alapján elég jónak tűnnek. Sajnos sok esetben a rekonstruált kép ennek ellenére elég távol esik az eredeti képtől. Ennek oka lehet az is, hogy háromirányú vetület esetén sok olyan pixelformáció van amelyek ugyanolyan vetületértékekkel rendelkeznek (*switching components*), mint már említettük. Ezekből mutatunk meg néhányat [19] alapján a 8. ábrán.

Ezekben az esetekben további információra lenne szükség az eredeti képről, amely segíteni tudja az algoritmust a megfelelő pixelformáció kiválasztásában.

6. Összefoglalás, További Tervek

A háromszögrácson, a rács szimmetriáját is kihasználva, természetes feladatként adódik a 3, illetve 6 irányú projekciókkal adott bináris tomográfiai problémák köre. Ezekre adott eljárásaink sztochasztikusak, szimulált hűtésen alapuló energiaminimalizáció, illetve genetikus megközelítésűek. Azt láthattuk, hogy 6 projekciós iránnyal, ahogy egyébként várható is, sokkal jobb eredményeket tudunk produkálni (a rekonstruált és az eredeti kép különbségét tekintve is).

A genetikus algoritmust is tervezzük átalakítani úgy, hogy 6 projekciós irányt is kezelni tudjon. Tervezzük valódi tesztképeken is kipróbálni megközelítéseinket. Ezenkívül hatékony determinisztikus algoritmusokat is fejlesztünk és publikálunk várhatóan a közeljövőben. Reményeink szerint egyes esetekben jobb eredményeket tudunk felmutatni, mint hasonló feltételek mellett a négyzetrácson.



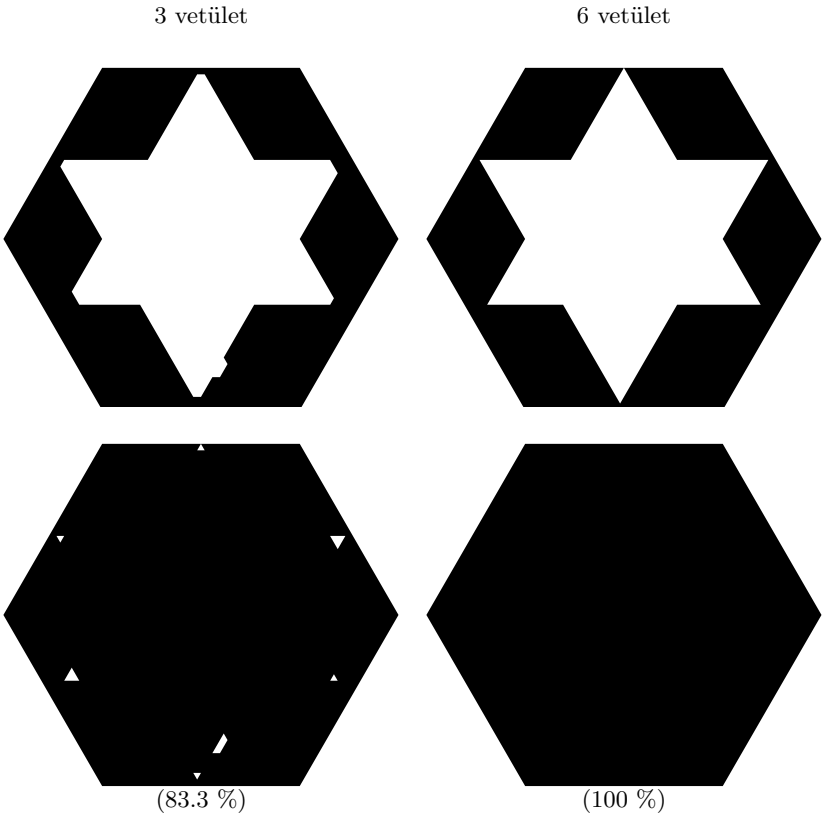
5. ábra: A Vegyes objektumok tesztkép rekonstrukciója 3 vetületből GA-val, valamint az eredeti és a rekonstruált képek különbségei (szimmetrikus differencia).

Köszönetnyilvánítás

Ez a magyar nyelvű anyag a [19, 18] (genetikus, evolúciós megközelítés), illetve a [15] (szimulált hűtés) alapján készült, azok anyagait is felhasználva.
Tibor Lukić kutatásait támogatja a Szerb Oktatási és Tudományos Minisztérium az OI-174008 és III-44006 projekteken keresztül. A közös kutatást a Magyar Tudományos Akadémia is támogatta a Domus Hungarica ösztöndíjjal, ami lehetővé tette Tibor Lukić számára, hogy a szerzők Debrecenben dolgozzanak együtt. A publikáció elkészítését a TÁMOP-4.2.2.C-11/1/KONV-2012-0001 számú projekt is támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

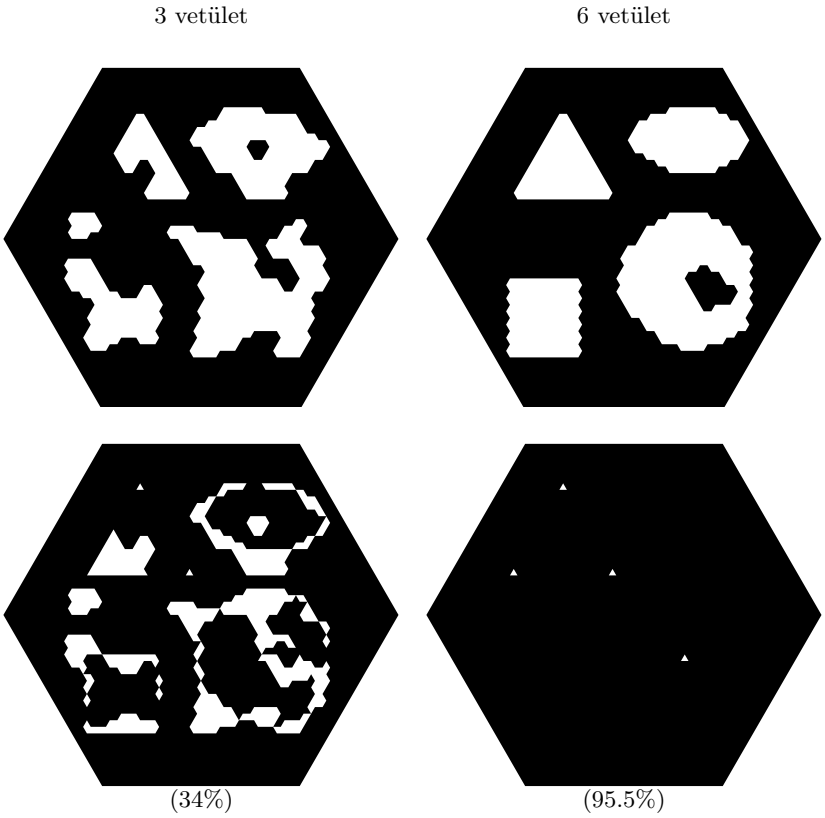
Irodalom

1. Álmos, A., Győri, S., Horváth, G., Várkonyiné-Kóczy, A.: Genetikus Algoritmusok. Typotex Kiadó, Budapest (2002)
2. Balázs, P.: Discrete Tomography Reconstruction of Binary Images with Disjoint Components Using Shape Information. Int. Journal of Shape Modeling 14, 189–207 (2008)
3. Balázs, P., Gara, M.: An Evolutionary Approach for Object-Based Image Reconstruction Using Learnt Priors . In: Proc. of 16th Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA). LNCS, vol. 5575, pp. 520–529. Springer-Verlag, Oslo, Norway (2009)
4. Batenburg, K.J.: A Network Flow Algorithm for Binary Image Reconstruction from Few Projections. In: Proceedings of 13th Proc. of 13th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI). LNCS, vol. 4245, pp. 86–97. Springer-Verlag (2006)
5. Batenburg, K.: An evolutionary algorithm for discrete tomography. Discrete Applied Mathematics 151, 36–54 (2005)
6. Bronzino, J.D.: The Biomedical Engineering Handbook, Third Edition - 3 Volume Set. CRC Press (2006)



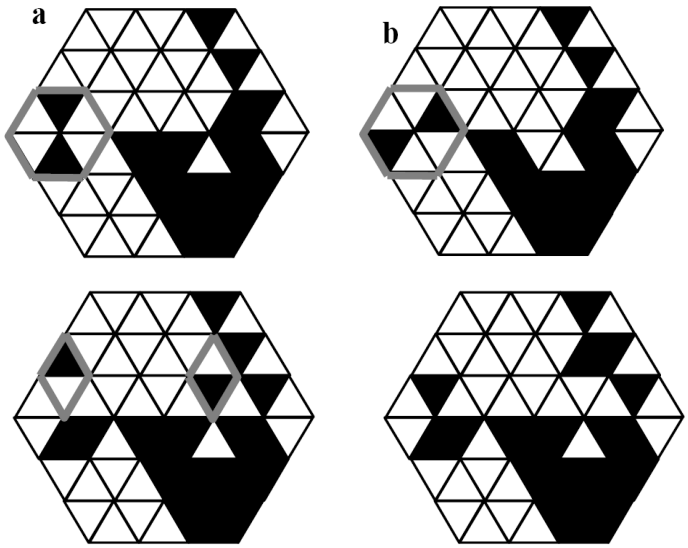
6. ábra: Első sor: a Csillag tesztkép rekonstrukciói 3 és 6 vetületből. Második sor: az eredeti és rekonstruált képek különbségei.

7. Goldberg, D.E.: Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning. Addison Wesley (1989)
8. Gritzmann, P., Prangenberg, D., de Vries, S., Wiegelmann, M.: Success and failure of certain reconstruction and uniqueness algorithms in discrete tomography. Int. J. Imag. Syst. Technol. 9, 101–109 (1998)
9. Herman, G.T., Kuba, A.: Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications. Birkhäuser (1999)
10. Herman, G.T., Kuba, A.: Advances in Discrete Tomography and Its Applications. Birkhäuser (2006)
11. Kirkpatrick, S., Gelatt, C., Vecchi, M.: Optimization by Simulated Annealing. Science 220(4598), 671–680 (1983)
12. Kittel, C., Kroemer, H.: Thermal Physics. Freeman Co., New York (1980)
13. Lukić, T.: Discrete Tomography Reconstruction Based on the Multi-well Potential. In: Proceedings of Combinatorial Image Analysis - 14th International Workshop (IWCIA). LNCS, vol. 6636, pp. 335–345. Springer-Verlag, Madrid, Spain (2011)



7. ábra: A Vegyes objektumok tesztkép rekonstrukciói. Az ábra elrendezése azonos a 6. ábra elrendezésével.

14. Lukić, T., Lukity, A.: A Spectral Projected Gradient Optimization for Binary Tomography. In: Computational Intelligence in Engineering, SCI, vol. 313, pp. 263–272. Springer-Verlag (2010)
15. Lukić, T., Nagy, B.: Energy-Minimization Based Discrete Tomography Reconstruction Method for Images on Triangular Grid. In: Combinatorial Image Analysis, Proc. of IWCIA 2012. LNCS, vol. 7655, pp. 274–284. Springer-Verlag, Austin, TX, USA (2012)
16. Matej, S., Herman, G.T., Vardi, A.: Binary Tomography on the Hexagonal Grid Using Gibbs Priors. International Journal of Imaging Systems and Technology 9, 126–131 (1998)
17. Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., Teller, E.: Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. Journal of Chemical Physics 21(6), 1087–1092 (1953)
18. Moisi, E., Cretu, V., Nagy, B.: Reconstruction of Binary Images Represented on Equilateral Triangular Grid Using Evolutionary Algorithms. In: Soft Computing Applications, Proceedings of the 5th International Workshop Soft Computing Ap-



8. ábra: A bal- és jobboldali egymás melleti pixelkonfigurációk vetületei megegyeznek mindhárom irányban (switching components).

plications (SOFA). Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 195, pp. 561–571. Springer, Szeged, Hungary (2012)
19. Moisi, E., Nagy, B.: Discrete Tomography on the Triangular Grid: a Memetic Approach. In: Proc. of 7th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2011). pp. 579–584. Dubrovnik, Croatia (2011)
20. Nagy, B.: Shortest path in triangular grids with neighbourhood sequences. Journal of Computing and Information Technology pp. 111–122 (2003)
21. Nagy, B.: A Symmetric coordinate frame for hexagonal networks. In: Theoretical Computer Science - Information Society, IS-TCS'04. pp. 12–18. Ljubljana, Slovenia (2004)
22. Nagy, B.: Characterization of Digital Circles in Triangular Grid. Pattern Recognition Letters 25/11, 1231–1242 (2004)
23. Nagy, B.: Generalized triangular grids in digital geometry. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyregyhziensis 20, 63–78 (2004)
24. Nagy, B.: Szomszédsági szekvenciák a háromszögrácson. In: NJSZT-Képaf: Képfeldolgozók s Alakfelismerők 4. konferenciája. pp. 197–205. Miskolc-Tapolca (2004)
25. Nagy, B.: Distances with Neighbourhood Sequences in Cubic and Triangular Grids. Pattern Recognition Letters 28, 99–109 (2007)
26. Russel, S., Norvig, P.: Artificial Intelligence: A Modern Approach. Prentice Hall (2002)
27. Spears, W.M.: Evolutionary Algorithms: The Role of the Mutation and Recombination. Springer (2000)
28. Varga, L., Balázs, P., Nagy, A.: Direction-dependency of a binary tomographic reconstruction algorithm. In: Proceedings of CompIMAGE 2010. LNCS, vol. 6026, pp. 242–253. Springer-Verlag (2010)

29. Weber, S., Nagy, A., Schüle, T., Schnörr, C., Kuba, A.: A Benchmark Evaluation of Large-Scale Optimization Approaches to Binary Tomography. In: Proc. of 13th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI). LNCS, vol. 4245, pp. 146–156. Springer-Verlag, Szeged, Hungary (2006)
30. Weber, S., Schnörr, C., Hornegger, J.: A Linear Programming Relaxation for Binary Tomography with Smoothness Priors. Electronic Notes in Discrete Mathematics 12, 243–254 (2003)
31. Weber, S., Schnörr, C., Schüle, T., Hornegger, J.: Binary Tomography by Iterating Linear Programs. In: Proc. of 10th International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA). LNCS, vol. 3322, pp. 38–51. Springer-Verlag (2004)